数理解析研究所講究録
1130 巻 2000 年 245-262

和算における行列式について

竹之内　脩

1　まえがき

和算において、行列式のことが西洋数学より早くに研究されていることは、すでに著名のことである。

関 孝和：解伏題之法（1683）

がよく知られたものであり、関流数学では、これを継いで、いろいろな研究がある。

一方、関と同時代の田中由真（1651～1719）にも、

田中 由真：算学紛解（1690 年前後？）

という稿本がある。内容的には、関の解伏題之法よりも優れた点が多く見られる。

井関 知辰：算法発揮（1690 年出版）

では、この田中の跡を受けて、行列式の説明をしている。

関 孝和、建部　賢明、建部　賢弘：大成算経巻之十七（1705～1709）

においては、理論の組み立ては、解伏題之法のとは異なり、田中、井関の方法によっているのである。

本論文では、これらについての概観を試み、それに対する本論文著者の考察を述べる。

2　和算における行列式

和算においては、行列式のことが西洋数学より早くに研究されている。

関 孝和：解伏題之法（1683）

がよく知られたものであり、関流数学では、これを継いで、いろいろな研究がある。

松永 良弼：解伏題交式斜乗之諺解（1715）

久留島 義太：久氏遺稿（年代不詳、松永の書と同じ頃か）

その他、その後を継いで研究がされている。

一方、関と同時代の田中由真（1651～1719）に、

田中 由真：算学紛解（1690 年前後？）

という稿本がある。その巻之一には、行列式が述べられており、内容的には、関の解伏題之法よりも優れた点が多く見られる。これは、8 巻から成っている。その巻之二に、

宮城 清行：明元算法（1689）

安藤 吉治：一極算法（1689）

中根 元圭：七乗冪演式（1691）

についての言及があるので、これらより後のものとされているが、しかし巻之一は、もっと早くにできているのかもしれない。巻之二以降は、巻之一とはやや異なる内容のものである。巻之八には 1683 年という年がはいっているが、他の巻には、年が書いてない。この書物が、田中自身の手になったものかもわからないのである。

ところで、

井関 知辰：算法発揮（1690）

では、この田中の跡を受けて、行列式の説明をしている。同様の説明は、

關 孝和、建部　賢明、建部　賢弘：大成算経巻之十七（1705～1709）

でもなされている。ここでの理論の組み立ては、解伏題之法のとは異なり、田中、井関の方法によっているのである。

明元算法、一極算法、七乗冪演式、算法発揮はいずれも刊本である。一方、解伏題之法、算学紛解は、稿本、写本が伝えられているに過ぎず、また解伏題之法、算学紛解の間の関係を知らせるような記述はない。これらの間の関係は、どのようになっているのか、疑問のあるところである。　また、井関知辰の算法発揮における行列式の取り扱いは、關の解伏題之法のものよりはるかに優れている。実際、その扱いは、今日、われわれがやっているものに近いものである。大成算経でも、この方法は採用されている。しかるに、その後の關流では、完全にこれを無視している感がある。これは、不思議なことである。

行列式に至る過程については、關の解伏題之法は不完全な記述で、内容的に明解でない部分が多い。それに対し、田中の算学紛解は、それを補っているとも見られる。田中の算学紛解は關の解伏題之法の内容を知って、それを発展させたものと見ることもできるかもしれない。關の解伏題之法は天和癸亥（1683）重訂とある。これをこのまま信用してよいかどうかは、客観的資料がないので、何ともいえない。一方、田中の算学紛解には、既に述べたように 1690 年前後に出版された明元算法、一極算法、七乗冪演式についての引用があるので、田中のものは關より後の研究である、という立場を、文献 [4] ではとっている。

ところで、關の解伏題之法には、定乗という節がある。これが理解に苦しむもので、要するに一つの未知数を消去した式の中に、もう一つの未知数の何乗が残っているか、ということであるが、それが関係するところは、この解伏題之法の他の部分にはでてこない。また關の他の稿本の中にも登場しないものである。そして、そこで用いられている一方の式を逆行させて扱う、という扱い方も、どこにも登場しない異質のものである。しかるに、田中の算学紛解の中では、これが実に巧妙な手段として登場している。これから見ると、關は田中のこの方法を何かで知って、それを取り入れたものとも考えられる。実際、田中

の算学紛解の内容は、そんなに一朝一夕でできるようなものではなく、長い年月を要したものと思われるのである。

闗の解伏題之法は、1683 年重訂ということであるが、闗はその頃 40 才過ぎと思われる。30 才台、力にまかせてやってきたことを整理しておこう、というのが重訂という書き方になったのであろうか。この解伏題之法のほかにも、

解隠題之法（1685 年襲書）、開方飜変之法（1685 年重訂）、

病題明致之法（1685 年重訂）、円攅之法（1683 年重訂）

がある。田中にしても、そのように長い間の労作をまとめたのが、算学紛解であると見ることができよう。明元算法、一極算法、七乗冪演式の引用も、そのまとめの最中に、書き入れたとしてもおかしくはない。

闗の解伏題之法の最後には、

右所録六篇所以解伏題之法也但挙一二而為之例矣学者須要分明理会得也書不尽言而已（右録する所の 6 篇は伏題を解する所以の法也。但し一二を挙げて之が例となす。学者すべからくはっきり理解し会得することを要する也。書は言を尽くさざるのみ。）

とある。また、田中由真の算学紛解にも、

餘ハ畧之学者右ノ術ニ依テ準知スヘシ

というところがあるのであるが、算学紛解のほうが、はるかに意図が明解である。

3 闗孝和の解伏題之法

闗の解伏題之法については、以前に述べた。（文献 [2]）闗の解伏題之法は闗孝和全集（文献 [1]）にあるが、そこには句読点、返り点、送り仮名がついている。原本にはもちろんこれらはないので、全集としては、このようなものはつけるべきではないと思う。

3.1 換式第四

まず、換式第四において、次の操作が述べられる。これは、帰除式（1 次式）二つから未知数を消去して一式を作り、平方式二つから 2 次の項を消して帰除式二つを作り、立方式二つから 3 次の項を消して平方式三つを作り、ということである。以下の式で、例えば

$\boxed{a}\boxed{b}$ とは $a+bx=0$ という式のこと

$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ とは $a+bx+cx^2=0$ という式のこと

である。

帰除式

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline ad-bc \\ \hline\end{array}$$

平方式

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline ae-bd & af-cd \\ \hline af-cd & bf-ce \\ \hline\end{array}$$

立方式

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & c & d \\ \hline e & f & g & h \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l|l|l|}\hline af-be & ag-ce & ah-de \\ \hline ag-ce & ah-de+bg-cf & bh-df \\ \hline ah-de & bh-df & ch-dg \\ \hline\end{array}$$

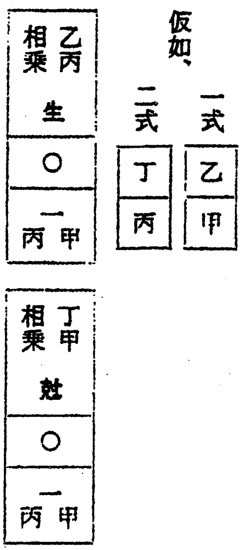
3.2 生剋第五

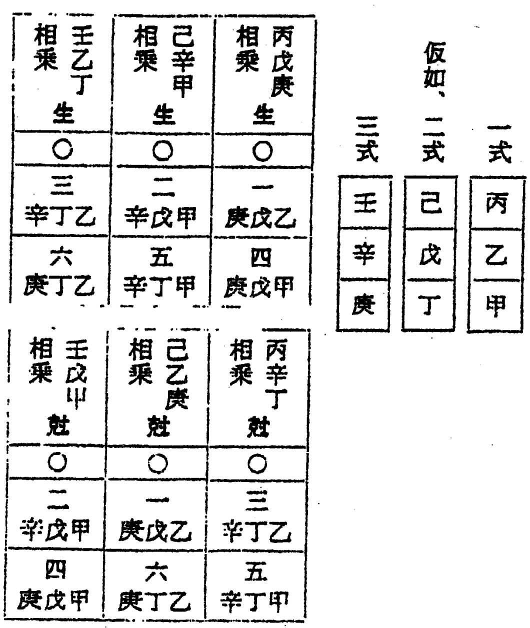
關は、次の生剋第五において、

得換式験変治之後求生剋也

として、何も説明なしに、次々と表を挙げる。

生はプラス、剋はマイナスのことである。關はていねいに未知数消去の計算をしてそれをまとめていったのであろう。





婁氐尾牛相乘財	危奎亢心相乘生	斗虚壁角相乘財	房箕女室相乘生
○	○	○	○
四 奎牛尾氐	五 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕氐
八 壁牛尾氐	七 奎女心亢	六 壁虚尾角	三 室女箕亢
十三 室牛尾氐	十二 奎牛心亢	十 壁虚心角	九 室女箕角

婁虚亢心相乘財	危箕壁角相乘生	斗氐女室相乘財	房奎尾牛相乘生
○	○	○	○
五 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕氐	四 奎牛尾氐
十六 壁虚心亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾氐	十一 奎牛尾亢
二十 室虚心亢	十九 壁牛箕角	十八 室女心氐	十七 奎牛尾角

四式	三式	二式	一式
婁	危	斗	房
奎	虚	箕	氐
壁	女	尾	亢
室	牛	心	角

婁氐女心相乘生	危奎尾角相乘財	斗虚亢室相乘生	房箕壁牛相乘財	婁虚尾角相乘生	危箕亢室相乘財	斗氐壁牛相乘生	房奎女心相乘財
○	○	○	○	○	○	○	○
廿二 奎女心氐	廿四 奎虚尾角	廿五 室虚箕亢	廿三 壁牛箕氐	廿四 奎虚尾角	廿五 室虚箕亢	廿三 壁牛箕氐	廿二 奎女心氐
廿六 壁女心氐	廿五 奎女尾角	廿四 室虚尾亢	廿三 壁牛箕亢	六 壁虚尾角	五 室女箕亢	八 壁牛尾氐	七 奎女心亢
十八 室女心氐	十七 奎牛尾角	廿 室虚心亢	十九 壁牛箕角	廿八 室虚尾角	廿七 室牛箕亢	廿六 壁牛心氐	廿五 奎女心角

婁箕亢牛相乘生	危氐壁心相乘財	斗奎女角相乘生	房虚尾室相乘財	婁箕女角相乘財	危氐尾室相乘生	斗奎亢牛相乘財	房虚壁心相乘生
○	○	○	○	○	○	○	○
卅 奎牛箕亢	廿九 壁虚心氐	廿三 奎女箕角	廿一 室虚尾氐	廿三 奎女箕角	廿一 室虚尾氐	卅 奎牛箕亢	廿九 壁虚心氐
廿三 壁牛箕亢	廿六 壁女心氐	廿五 奎女尾角	廿四 室虚尾亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾氐	十一 奎牛尾亢	十六 壁虚心亢
廿七 室牛箕亢	廿六 壁牛心氐	廿五 奎女心角	廿八 室虚尾角	九 室女箕角	十三 室牛尾氐	十二 奎牛心亢	十 壁虚心角

關はこのあとで、次のように述べている。

右各逐式交乗而得生剋也雖然相乗之数位繁多而不易見故以交式斜乗代之

（右おのおのの式を交乗して生剋を得る也。しかりといえども、相乗の数繁多にして見やすからず。故に、交式、斜乗を以てこれに代える。）

交式、斜乗

従換三式起換四式従換四式起換五式逐如此換二式換三式者不及交式也

順逆共逓添一得而乃式数奇者皆順偶者順逆相交也

（換三式より換四式を起し、換四式より換五式を起す。逐ってかくの如し換二式、換三式は交式に及ばず

順逆共互いに一を添えて得る。而してすなわち式数が奇数ならば皆順、偶数ならば順逆相交わるなり）

交式各布之従左右斜乗而得生剋也換式数奇者以左斜乗為生以右斜乗為剋偶者左斜乗右斜乗共生剋相交也

（交式は、おのおの此の図にしたがい、左右から斜乗して正負を得る。奇数の換式のときは、左からの斜乗は正、右からの斜乗は負にする。偶数の換式のときは、左からの斜乗、右からの斜乗は交互に正負にする。）

換五式まで書いてあるが、省略する。（換五式には誤りがある。）

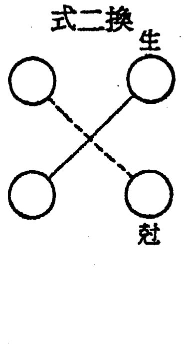
換三式

順	順	順
三	二	一

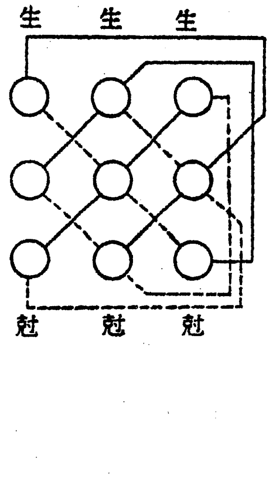
換四式

逆	順	逆	順
四	三	二	一
二	四	三	一
三	二	四	一

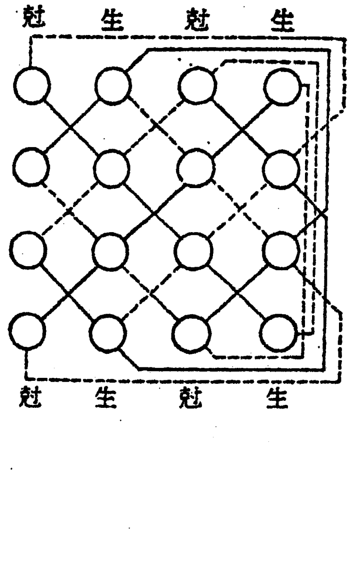
式二換



式三換



式四換



4 田中由真の算学紛解

田中由真は算学紛解において、行列式を与えている。彼はこれを、雙式定格術と述べている。

前式後式トモニ飯除式ノ時ハ互ニ斜乗シテ相消適等ヲ得ル解義ニ曰前ノ A ハ B ニヨル何某ナリ D ヲ乗シテハ B ニヨリ D ニヨル何某ナリ正トシテ寄左○後式ノ C ハ D ニヨル何某ナリ B ヲ乗シテハ又 B ニヨリ D ニヨル何某ナリ負トシテ相消数ヲ得ル是両式寄消ノ発端ニシテタトエハ幾乗ノ式ニテモ皆此理ヲ推察シ定格ヲ得ヘシ

このように飯除式（帰除式と同じ。1 次式のこと）からはじめて、關の換式と同様のことをして、それから直ちに行列式の計算にはいる。前後飯除式之格、前後平方式之格は省略する。

前後立方式之格

ここでは、まず關と同様に、3 次式二つから、次のように 2 次式三つを作る。

$$\begin{cases} a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 & \cdots ① \\ e + fx + gx^2 + hx^3 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

これから、

$$\begin{cases} ②\times a - ①\times e & A + Bx + Cx^2 = 0 & \cdots ③ \\ ②\times b - ①\times f + ③\times x & D + Ex + Fx^2 = 0 & \\ ①\times h - ②\times d & G + Hx + Ix^2 = 0 & \end{cases}$$

ここで、

$$A = af - eb \quad B = ag - ec \quad C = ah - ed$$

$$D = ag - ec \quad E = ah - ed + bg - fc \quad F = bh - fd$$

$$G = ah - ed \quad H = bh - fd \quad I = ch - gd$$

という置き換えをしている。

上ノ如ク並列シテ互ニ斜乗シ陰陽率ヲ得ルコト次ノ如シ

$$\left.\begin{matrix} A & F & H & \text{相乗} \\ B & D & I & \text{相乗} \\ C & E & G & \text{相乗} \end{matrix}\right\} \text{陰率} \qquad \left.\begin{matrix} A & E & I & \text{相乗} \\ B & F & G & \text{相乗} \\ C & D & H & \text{相乗} \end{matrix}\right\} \text{陽率}$$

解ニ曰飯除式ノ正負ヲ分ツニ $\begin{matrix} ① & ② \\ ③ & ④ \end{matrix}$ 此ノ如ク ① ④ 相乗ヲ正トシ、② ③ 相乗ヲ負トスルニ今立方式第一式ヲ以テ $A \quad -B \quad C$ 此ノ如ク正負ヲ記シテ是ヲ以

テ右皈除ノ正負ニ乗スレハ又正負ヲ生ス其正ヲ今ノ陽率トナシ負ヲ以テ陰率トス今下ニ図ヲ布テ其斜乗正負陰陽率ノ別チヲ記ス是以テ三乗式已上ノ陰陽率ヲ準知スヘシ

A		
	① E	② F
	③ H	④ I

AEI 相乗 同名 陽率
AFH 相乗 異名 陰率

	B	
① D		② F
③ G		④ I

BFG 相乗 同名 陽率
BDI 相乗 異名 陰率

		C
① D	② E	
③ G	④ H	

CDH 相乗 同名 陽率
CEG 相乗 異名 陰率

前ニ記ス皈除式ノ①②③④ヲ以テ図ニ記ス其正負ト今乗スル $A\ B\ C$ ノ正負トヲ同名ヲ陽率トシ異名ヲ陰率トス図ニ依テ推テ知ルヘシ

前後三乗式之格

ここでは、前の前後立方式之格の場合と同じように、

$$\begin{cases} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0 \\ f + gx + hx^2 + ix^3 + jx^4 = 0 \end{cases}$$

から、3 次式四つを作る。

$$\begin{cases} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0 \\ E + Fx + Gx^2 + Hx^3 = 0 \\ I + Jx + Kx^2 + Lx^3 = 0 \\ M + Nx + Ox^2 + Px^3 = 0 \end{cases}$$

右四式ヲ以テ互ニ斜乗シテ陰陽率ヲ求ムルナリ

$AFLO$ 相乗	$AGJP$ 相乗	$AHKN$ 相乗
$BEKP$ 相乗	$BGML$ 相乗	$BHIO$ 相乗
$CELN$ 相乗	$CFIP$ 相乗	$CHJM$ 相乗
$DEJO$ 相乗	$DFKM$ 相乗	$CGIN$ 相乗

右一十二位相併陰率トス

$AFKP$ 相乗	$AGLN$ 相乗	$AHJO$ 相乗
$BELO$ 相乗	$BGIP$ 相乗	$BHKM$ 相乗
$CEJP$ 相乗	$CFLM$ 相乗	$CHIN$ 相乗
$DEKN$ 相乗	$DFIO$ 相乗	$CGJM$ 相乗

右一十二位相併陽率トス

此ノ如ク各斜乗シテ陰陽率ヲ求テ …

○其三乗式陰陽率ヲ求ルハ右皈除式ノ格ヲ以テ立方式ノ定率ヲ求ル如ク又立方式ノ格ヲ以テ今三乗式ノ陰陽率ヲ求ルナリ其第二式三式四式ヲ以テ今假ニ立方術ノ図ニナソラヘ其第一式ヲ以テ正負ヲ記ス是ヲ斜乗ノ法トス

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨
立方斜乗陰陽率之図		

$A \quad -B \quad C \quad -D$

サテ已前立方術ノトキ陽率ニナルモノヲ皆正トシ陰率ニナルモノヲ皆負ト見テ是ニ今ハ第一式ヲ乗スルニ其方式ノ陽率ニ第一式ノ内正ヲ乗シテハ同名相乗ニテ今ノ陽率トス又負ヲ乗シテハ異名相乗ニテ今ノ陰率トストカク其立方式ノ陰陽率ト今乗スル正負トヲ見合セ三乗式ノ陰陽率ヲ求ルコト専一ナリ上ノ立方術ノ図ニ①ヨリ⑨マテノ数ヲ記シ下ノ図ニモ九ツノ数ノ前ニ①ヨリ⑨ヲ記ス是ヲ合紋ニシテ其正負陰陽率ヲ勧知スヘシ

タトヘハ立方ノ術式ニ ①⑤⑨ 相乗ハ是陽率ナリコレニ今 A ノ正ヲ乗スル故 $AFKP$ 相乗ヲ同名ナル故今三乗ノ陽率トス又或ハ立方術ノ ③⑤⑦ 相乗ハ陰率ナルニ今 A ノ正ヲ乗スレハ異名ナル故ニ $AHKN$ 相乗ハ今三乗ノ陰率トス此ノ如ク前立方術ノ陰陽率ト今ノ正負トニ随テ又今ノ陰陽率ヲ究テ名ヲ記シテ各三乗式ノ格術ヲ求ルナリ

学者右ノ術ヲ推テ各求之記スル所ノ二十四位ノ率ニ引合テコゝロムヘシ

A			
	①F	②G	③H
	④J	⑤K	⑥L
	⑦N	⑧O	⑨P

	B		
①E		②G	③H
④I		⑤K	⑥L
⑦M		⑧O	⑨P

		C	
①E	②F		③H
④I	⑤J		⑥L
⑦M	⑧N		⑨P

			D
①E	②F	③G	
④I	⑤J	⑥K	
⑦M	⑧N	⑨O	

四乗式已上ノ術ハ文繁多ナル故ニ略之即四乗式ノ陰陽率ハ一百二十位五乗式ハ七百二十位六乗式ハ五千０四十位トナルナリ右ノ術意ヲ以テ各准知スヘシ

5　井関知辰の算法発揮

井関知辰は、田中由真の門に連なる者である。1690 年に算法発揮という書物を刊行している。この中に行列式が扱われている。これが、日本において、刊行された書物の中で行列式が扱われた最初のものである。上中下の 3 巻から成り、巻之上では行列式が扱われ、巻之中では、真術虚術の問題と答と術、巻之下ではその演段が述べられている。

これは、刊本であるので、その前後立方式之格の部分をコピーで収載しておく。

前後平方式之格、前後立方式之格、前後三乗方式之格、前後四乗方式之格が、この前後立方式之格の形式でていねいに述べられており、そして、前後五乗方式之格が、五乗陽率、五陰率まで述べて、その法は前と同じだから、これを畧す、といっている。

○前後六乗式以上ハ畧之前ノ例ニ準シ推テ知ルヘシ陰率ヲ求ル法此書ニ載スルニ品ノ外直ニ陰率ヲ得ル法アリトイエドモ初學ノ得心ニ踈シ故ニ其法ヲ載セズ此書ヲ得心シ後自ラ其理ヲ發セン

○最初ニ云フ如ク前後両式ヲ求メテ後其式ヲ得ル所ノ乗數ニ随ヒソレソレノ陽率陰率ニ見合テ本術ヲ作ルヘシ今初學ノ為メ中巻ニ本術下巻ニ演段ヲ附シ以テ豫メ其旨ヲ示ス圓機ノ士ハ部ヲ調ヘスシテ自ラ此ヲ暁スベシ庸學之人ハ三教ヲ 率教術教演段教 全クストモ口授ニ非ズンハ猶此ヲ得コト難カラン乎然リトイヘトモ得難キヲ病マズシテ旦暮ニ首尾ヲ照シ見ハ何ソ其レ此ヲ得スト云コト無哉

前後立方式之格

前式 |イ正 |ロ正 |ハ正 |ニ正 何某ヲ得ル式也

後式 |ホ正 |ヘ正 |ト正 |チ正 何某ヲ得ル式也

前式ノ㋑ヲ後式ニ乗ノ |イホ正 |イヘ正 |イト正 |イチ正 得ル内後式ノ㋭ヲ前式ニ乗ノ |イホ正 |ロホ正 |ハホ正 |ニホ正 得ル式ヲ減ノ餘第一式トス▲前式ノ㋺ヲ後式ニ乗ノ |ロホ正 |ロヘ正 |ロト正 |ロチ正 得ル内後式ノ㋬ヲ前式ニ乗ノ |イヘ正 |ロヘ正 |ハヘ正 |ニヘ正 得ル式ヲ減ノ餘 |ロホ貟イヘ正 | |ハヘ貟ロト正 |ニヘ貟ロチ正 第一式ヲ加ヘテ第二式トス▲後式ノ㋠ヲ前式ニ乗ノ |イチ正 |ロチ正 |ハチ正 |ニチ正 得ル内前式ノ㋥ヲ後式ニ乗ノ |ニホ正 |ニヘ正 |ニト正 |ニチ正 得ル式ヲ減ノ餘第三式トス

立陽率

㋵ |ニホ貟 イチ正	㋾ |ハホ貟 イト正	㋷ |ロホ貟 イヘ正
㋟ |ニヘ貟 ロチ正	㋻ |ニホ正 イチ貟 ハヘ正 ロト貟	㋦ |ハホ貟 イト正
㋹ |ニト貟 ハチ正	㋕ |ニヘ貟 ロチ正	㋸ |ニホ貟 イチ正

第一式　何某ヲ得ル式

第二式　何某ヲ得ル式

第三式　何某ヲ得ル式

▲平陰率 ヘ相乗正 ナリ相乗貟

立陰率

㊣ 位三 　貟 位三

正	貟
リワレ相乗	リカタ相乗
ヌカヨ相乗	ヌヲレ相乗
ルヲタ相乗	ルワヨ相乗

解曰第一式 |㋷正 |㋦貟 |㋸正 如是正貟ヲ記ノ平陰率ニ因ンデ立陰率ヲ知ル

三ツノ圖ノ〇ノ中ニ記ス者ハ立陽率ノ側ニ有ル名也〇ノ外ニ記ス者ハ平陽率ノ側ニ有ル名也ソレソレニ見合セテ圖ノ作意得心スベシ

		㋷正
㋟リ	㋻ト	
㋹ヌ	㋕チ	

平陰率ヲロニ唱ヘ共次第ニ準ノ上ノ圖ノ〇ノ外ニ有ル名ヲ見合セテ〇ノ中ニ有ル名ニテ下ノ圖ヲ記ス

㋵リ	㋾ト	
		㋦貟
㋹ス	㋕チ	

右同

㋵リ	㋾ト	
㋟ヌ	㋻チ	
		㋸正

右同

ワレ相乗正 カタ相乗貟	ヲレ相乗正 カヨ相乗貟	ヲタ相乗正 ワヨ相乗貟

㋷正ヲ乗ノ リワレ相乗正 リカタ相乗貟

㋦貟ヲ乗ノ ヌヲレ相乗貟 スカヨ相乗正

㋸正ヲ乗ノ ルヲタ相乗正 ルワヨ相乗貟

右正三和ト貟三和ト適等 則立陰率

6 關、建部の大成算経

大成算経は關孝和、建部賢明、建部賢弘が共同で執筆したもので、全 20 巻から成る。1705 ～ 1709 の作とされるが、關孝和は 1707 に死去したため、完成は建部兄弟の手になるものである。ただし、刊行はされなかった。これが關流数学の原典としてどの程度浸透していたのか。あとで述べるように、不審に思われる点もある。写本が伝えられているのみである。それも、数多くあるようであるが、間違いも多い。本論文著者の手元にある 3 種の写本でも、それぞれに間違いがある。(多くは字の間違いであるが、それによって全く意味の通じないこともある。如ー加、乗ー等，隻ー雙など。わけもわからずにただ写された結果であろう。)

大成算経巻之十七　後集　は 全題解 という標題がついており、見題篇、伏題篇から成る。伏題篇は、だいたい關の解伏題之法に沿ったものであるが、内容の説明があるだけ、こちらの方が解伏題之法よりよい点が見られる。

この伏題篇交乗第五に行列式が扱われている。その前の換式第四では、二つの例えば立方式から三つの平方式を導くことが述べられている。これは、關、田中以来、すべて同じようにやられている。そして、この平方式三つから、未知数を消去することを論ずるのである。

はじめに、この術が、平方を起点として立方に、立方から三乗方に、三乗方から四乗方へと進めることが述べられている。その方法は、まず第一式を主式とし、はじめは残りの式の実を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式実を掛ける。次に残りの式の方を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式方の符号を変えたものを掛ける。次に残りの式の初廉を除いたものに一つ前の交乗法を適用し、それに第一式初廉実を掛ける。このように最後までしていってそれらを加える、というやり方である。

ここでは、關の交式斜乗というものはない。ここにあるのはいわば帰納的な方法で、むしろ田中、井関のやり方に近いものである。これらのことについての考察は、後の節で述べる。

だいたい、田中のところで述べたのと同じであるが、説明の違うところに注目しながら見ていくことにする。

立方式

両式、各立方のとき、田中のように、平方式三つに置き換えて、次のようにする。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

一式を主式とし、残りの式で、実のところを取り去る。そして、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

○	① E	② F
○	③ H	④ I

そして、①④相乗、②③相乗で、EI, FH を得る。これに主式実を乗じ、AEI は加え、AFH は減ずる。次、餘式で、方のところを取り去る。そして、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

① D	○	② F
③ G	○	④ I

そして、①④相乗、②③相乗で、DI, FG を得る。これに主式方を乗じ、BDI は減じ、BFG は加える。これは、B が雙級にあるからである。復た、餘式で、廉のところを取り去る。そして、残った部分に平方交乗法の名を書き入れる。

① D	② E	○
③ G	④ H	○

そして、①④相乗、②③相乗で、DH, EG を得る。これに主式廉を乗じ、CDH は加え、CDG は減ずる。これは、C が隻級にあるからである。

以上 6 個の項の加減で、立方交乗法が得られた。

立方交乗法

AEI	加	BFG	CDH
AFH	減	BDI	CEG

三乗方交乗法についても、このように細かく記述して、最終的に 24 個の項を与えている。

また、四乗方交乗法については、交乗法の途中の記述はなしに、最終の 120 個の項を書き上げている。

7 その後の文献

その後の文献としては、次のようなものがある。

松永 良弼：解伏題交式斜乗之諺解

久留島 義太：久氏遺稿

石黒　信由：交式斜乗生尅補義

菅野　元健：交式斜乗捷法

しかし、これらはいずれも關の交式、斜乗の方法について述べているもので、新しい発展はない。

8 考察

(1) 和算における行列式とは何を目的としたものか。

和算における行列式の研究は、伏題というものの解決からはじまっている。伏題はもともと

澤口　一之：古今算法記、遺題

の研究から派生したと見られるが、この遺題の直接の研究は、

關 孝和：發微算法

田中　由真：算法明解

にある。前者は刊本であり、後者は稿本である。

さて、伏題とは、問題の文から、求める量に対する直接の方程式がたてられず、他の量を媒介として、その量に対する方程式を作り、その係数として真に求める量がはいってきて、媒介の量を消去することにより、真に求める量に対する方程式を得るような種類の問題である。

求める真の量に対する方程式を真術といい、それを求める為の媒介的な量に対する方程式を虚術という。媒介的な量を消去するのであるから、虚術の方程式は2個いることになる。(多くの媒介変数をたてなければならないこともあり、そのときはもっと数多くの方程式が必要になる。關の解伏題之法では、そのようなものもあげられているが、あまり意味があるようには思われない。)

以上のようなことから、平方式2個から2個の帰除式、立方式2個から3個の平方式、三乗方式2個から4個の立方式という形にして、それから行列式として、変数を消去した式を作るのである。したがって、行列式の形で得られたものが、真術の方程式であり、それを解いて、真に求めている量を得るのである。この方程式は通常非常に高次の方程式

となる。その次数を定めるのが關の定乗と思われるが、それがわかったところで、どういう意味があるのか。不可解である。

また、この式は、2 式の終結式である。これに対する田中の議論は興味あるものであり、それについては文献 [3] において論じた。

いずれにしろ、行列式の発端となる事項は、西洋数学におけるものとは全く異なる。そして和算においては、行列式を書き下した式を求めることだけがなされているので、それ以上の研究、すなわち行列式の性質についての研究は全くない。

さらにまた、行列式はこれだけ単独に扱われ、伏題の解法に、これを活用しているようなものはない。これも奇妙な現象である。

(2) 方程式の数を増やす工夫。

まず準備的プロセスとして、平方式 2 個から 2 個の帰除式、立方式 2 個から 3 個の平方式、三乗方式 2 個から 4 個の立方式という形にする。

関の解伏題之法では、このプロセスを換式とよんでいる。どうしてこのような方法を考えたのであろうか。

2 個の式から、未知数を消去するとき、高次の項を消去し次々と次数を下げていく。ところで、平方式 2 個から 2 個の帰除式にすると、それぞれの係数になる要素は 2 次の式になる。最終の式の要素は 4 次の式になる。立方式 2 個から 2 個の平方式にすると、同様に、各要素は 2 次の式になる。それをまた 2 個の帰除式にすると、各要素は 4 次の式になる。そして最終の式の要素は 8 次の式になる。立方式のときは、同様にやっていくと、帰除式にしたときは各要素は 16 次の式になり、煩雑になる。そこで考え出した工夫であろうか。

いずれにしても、この工夫は、注目すべきものである。藤井 [5] も、このことに注意している。

(3) 複雑な式を単一の文字で置き換える操作。

換式のプロセスで得た式の要素は 2 文字の組み合わさったものであるが、これを単一の文字に直して、行列式を作る議論にはいるのである。複雑な式を単一の文字で置き換える操作は、関の解伏題之法では括という名をつけているが、代数の要素としては、これも重要なステップである。田中は、格別名前をつけていない。これが、関が先か田中が先か、という点に関係して、考慮すべき問題であろう。

(4) 展開式のつくりかた。

關にしろ田中にしろ、2 次の行列式はどうもないことであったであろう。そして、3 次の行列式が研究の発端と思われる。そのまとめ方が興味のあるところである。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

から出発して、

+	AEI	BFG	CDH
−	AFH	BDI	CEG

を得る。

關の場合

生	AEI BEI CEI	DHC CEH CFH	GBF BFH BFI
剋	AHF BFH CFH	DBI BEI BFI	GEC CEH CEI

これは、AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG から、第 1 行に EI, 第 2 行に CH, 第 3 行に BF、そして再び第 1 行に HF, 第 2 行に BI, 第 3 行に EC を掛けて引くと、ちょうど不要な項が打ち消し合うことを見たのであろう。各項における因子の順序が組織的にはできているが、しかし、例えば 2 番目の DHC, CEH, CFH が、なぜ CDH, CEH, CFH というようになっていないのか、つまり C と H の間に第 2 行の要素を入れていく、という書き方になっていないのか、不思議である。というのも、4 次の場合には、このようにきちんと組織的な形で書いているからである。

いずれにしても、このやり方は、行列式の計算としては、随分よけいなことをしている。

田中の場合

これは、いわば、行列式の第 1 行に関する展開をしているので、大変、合理的である。

(5) 関、田中は、行列式の展開式をどのようにして導いたのであろうか。

3 次の行列式の場合、井関の算法発揮の中に次のように書かれていることから、実際、消去の過程をていねいに実行した結果である、と考えられる。

右ノ圖ニ詳也トイヘ𪜈若疑ハシキ輩ハ如左シテ可知ル
第一式ノ(リ)ヲ第二式ニ乗ジ リヲ正 リワ正 リカ正 得ル内第二式
ノ(ヲ)ヲ第一式ニ乗ジ リヲ正 ヌヲ正 ルヲ正 得ル式ヲ減ジ餘天式▲
第一式ノ(リ)ヲ第三式ニ乗ジ リヨ正 リタ正 リレ正 得ル内第三式
ノ(ヨ)ヲ第一式ニ乗ジ リヨ正 ヌヨ正 ルヨ正 得ル式ヲ減ジ餘地式

天式	(ト) ヌヲ負 リワ正	(チ) ルヲ負 リカ正
地式	(リ) ヌヨ負 リタ正	(ヌ) ルヨ負 リレ正

天式 何某ヲ得ル式
地式 何某ヲ得ル式
平陰率ニ依テ等数ヲ得ル
トヌ相乗ジ ヌルヲヨ相乗正 リヌヲレ相乗負 リルワヨ相乗負 リリワレ相乗正 寄左
▲チリ相乗ジ ヌルヲヨ相乗正 リルヲタ相乗負 リヌカヨ相乗負 リリカタ相乗正 得数
相消ジ (リ)ヌヲレ相乗負 (リ)ルワヨ相乗負 (リ)リワレ相乗正 (リ)ルヲタ相乗正 (リ)ヌカヨ相乗正 (リ)リカタ相乗負
遍ク(リ)ヲ省テ五陰率ヲ知ル
如此ノ陰率ヲ知ルトイヘ𪜈乗数貴キニ随テ事繁多ニ
成ル故ニ前ノ如クノ陰率ヲ求ム幾乗ノ陰率ヲ求ルモ
同之故三四五乗ノ下ニ是ヲ載セス只初ノ例ニ準ンズ

(6) 高次の行列式について、関、田中、井関、建部などの人々は、どのような意味をもったものととらえていたのであろうか。

関の解伏題之法では、この細かな展開の計算の結果を、4 次、すなわち三乗方式についてもあげている。しかるに、田中の算学紛解、井関の算法発揮、関・建部・建部の大成算経では、4 次以上は、3 次の場合を踏襲して、次数の低い行列式を使った展開の形で求めている。

これは、行列式というものからは、行列式の展開として、評価できるが、しかし、これらの人たちが目標としていた虚術から不要な未知数を消去する、という目標がこれで達成されたという論拠を、この人たちはもっていたのであろうか。

(7) 後の研究で、大成算経の方式が継続されていないのはどうしてか。

関の交式斜乗の方法は、いわゆるサラスの方法を、高次の場合にあげていくやりかたとして、一理あるものであり、注目される。

しかし、関、建部以降の関流、すなわち、

松永 良弼、久留島 義太、菅野 元健、石黒 信由

などの研究では、この方法をさらに高次の場合に追求しているが、そのもとになる式が何か、ということはなされていない。その意味では、それらの研究は、あまり価値を認められないと思われる。

以上の諸点から、和算における行列式の研究は、それを作り出したことは評価できても、その実質的な姿ということになると、ごく限られた点にしか価値を認められないものと考える。

参考文献

[1] 関孝和全集、一四三頁〜一五八頁

[2] 竹之内 脩、關孝和の解伏題之法について、国際研究論叢、第 12 巻 pp.1–14

[3] 竹之内 脩、田中由真の終結式について、和算研究所紀要、第 2 巻

[4] 加藤平左エ門、和算の研究 行列式及円理、東京開成館 (1944)

[5] 藤井康生、連立方程式の解法について——江戸時代の数学書の問題より——、日本数学史学会第 2 回数学史研究発表会 (1995)